PROBABILIDADES

Espaço amostral e evento

- ***Espaço amostral, S***, de uma experiência aleatória:
  - ***Def***: Conjunto de todos os resultados possíveis dessa experiência aleatória.
  - ***Ex***: Experiência aleatória é lançamento de dado $\Rightarrow \boldsymbol{S} = \{1,2,3,4,5,6\}$

- ***Evento ou acontecimento***:
  - ***Def***: Subconjunto do espaço amostral ***S***.
  - ***Ex***:

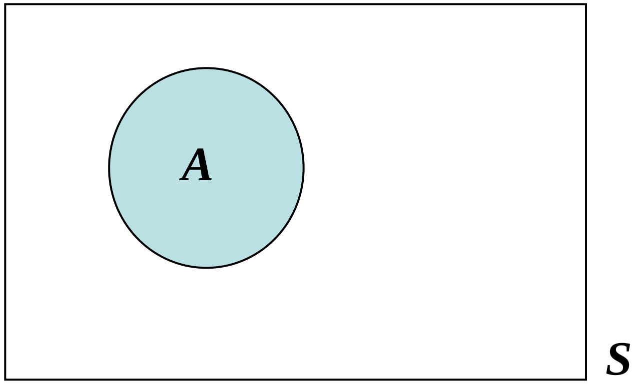
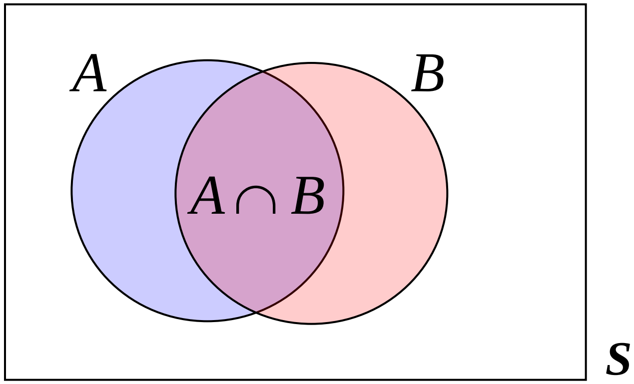


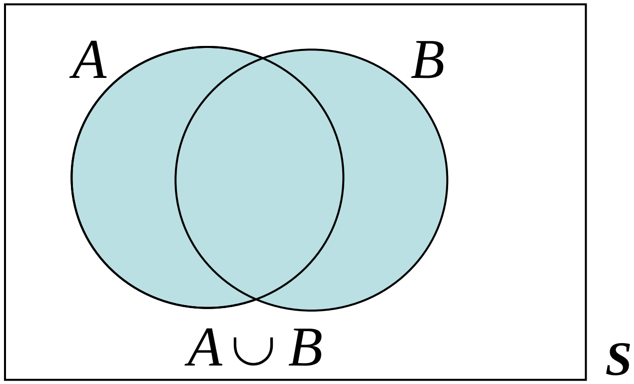
Diagrama de Venn

Operações sobre conjuntos

a) $A \cap B$ - ***Intersecção de A com B***

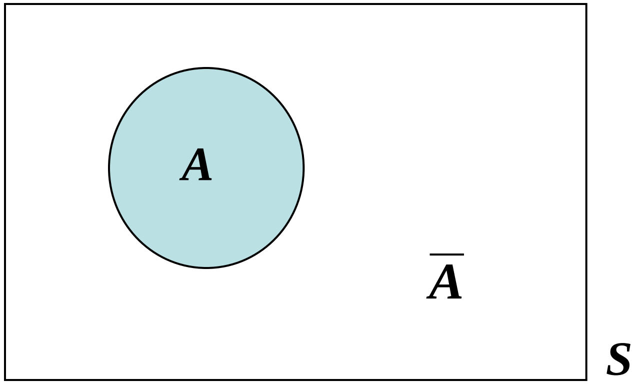


b) $A \cup B$ - ***Reunião de A com B***

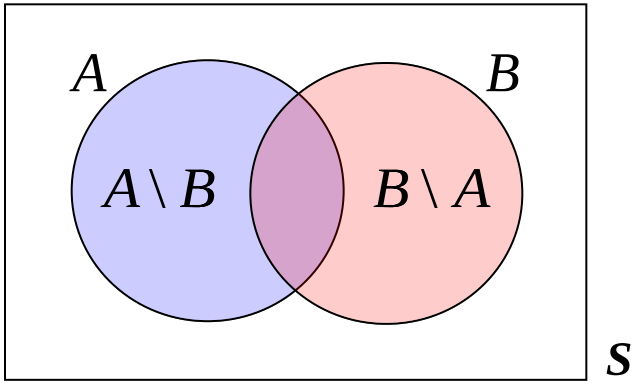


Operações sobre conjuntos

c) $\overline{A}$ - ***Complemento de A (em S)***

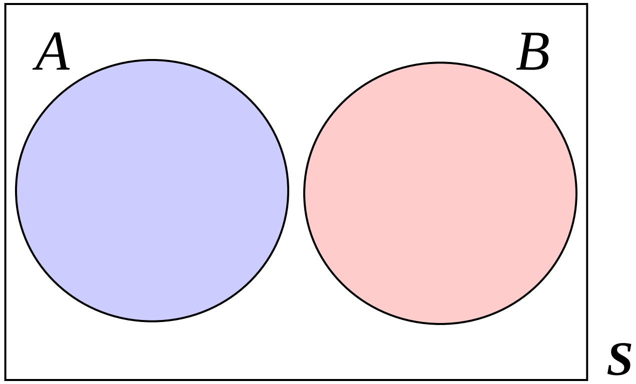


d) $A - B = A \setminus B$ - ***Diferença entre A e B (A excepto B)***



Operações sobre conjuntos

e) Os eventos A e B são ***mutuamente exclusivos*** quando: $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$



f) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ***- 1ª Lei de De Morgan***

g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ***- 2ª Lei de De Morgan***

Probabilidade de um evento

- *Def. clássica*: A ***probabilidade do evento A*** é dada por

$$P(A) = \frac{\# A}{\# S}$$

$\# S$ – Nº de elementos do espaço amostral da experiência aleatória.

$\# A$ – Nº de elementos de A, $A \subseteq S$.

Validade: Apenas quando os elementos de ***S*** são ***mutuamente exclusivos*** e ***igualmente prováveis***.

Probabilidade de um evento

- Propriedades:

$i)\quad 0 \leq P(A) \leq 1$

$ii)\quad P(S) = 1$

$iii)\quad A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Regra da adição)

$iv)\quad P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$v)\quad P(\emptyset) = 0$

$vi)\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$vii)\quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Exercício

Os eventos *A* e *B* ocorrem com probabilidades de 20% e 70%, respectivamente. Os dois eventos ocorrem em simultâneo em 15% dos casos. Calcule a probabilidade de ocorrer:

a) *A* ou *B*

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.2 + 0.7 - 0.15 = 0.75 \end{aligned}$$

b) Apenas *A*

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= 0.2 - 0.15 = 0.05 \end{aligned}$$

c) Nem *A* nem *B*

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - 0.75 = 0.25 \end{aligned}$$

Probabilidade condicional

- *Def:* A ***probabilidade condicional*** de A dado B é dada por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

- *Def:* A e B são ***eventos independentes*** sse

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- *Teorema da regra da multiplicação:*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

Probabilidade condicional

- *Teor:* A ***probabilidade total*** de um evento A é dada por

$$P(A) = \sum_{i=1}^{r} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

- *Teorema de Bayes:*

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{r} P(B_i)P(A \mid B_i)}, \quad k = 1,2,\ldots,r$$

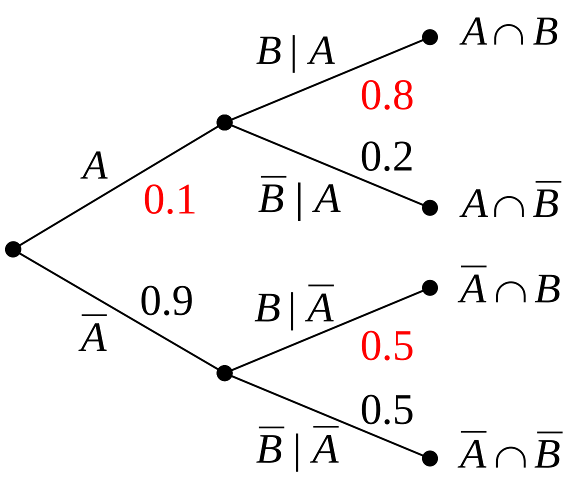
Exercício

Sabe-se que 10% dos clientes que entram numa certa loja gastam pelo menos 50 euros. 80% destes clientes e 50% dos que gastam menos de 50 euros pagam com cartão de crédito. Determine a probabilidade de um cliente escolhido ao acaso:

a) Pagar com cartão de crédito.

A:"O cliente gasta pelo menos 50 euros"

B:"O cliente paga com cartão de crédito"



$P(A) = 0.1 \qquad P(B \mid A) = 0.8 \qquad P(B \mid \overline{A}) = 0.5$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$= P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})$$

$$= 0.1 \times 0.8 + 0.9 \times 0.5 = 0.53$$

Exercício

b) Gastar menos de 50 euros sabendo que paga com cartão de crédito.

$$P\left(\overline{A} \mid B\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\overline{A}\right)P\left(B \mid \overline{A}\right)}{P(B)} = \frac{0.9 \times 0.5}{0.53} \approx 0.8491$$